非加法的測度空間における EGOROFF の定理と RIESZ 空間の正則性(バナッハ空間及び関数空間の構造の研究)

川邊, 淳; 浅野, 篤

非加法的測度空間におけるEGOROFFの定理とRIESZ空間の正則性

信州大学・工学部 河邊 淳* (Jun Kawabe)
浅野 篤 (Atsushi Asano)
Faculty of Engineering, Shinshu University

概要. この要約では，解析学で有用な ε-論法の代わりとなる新たな滑らかさの概念 (漸近的 Egoroff 性) を Riesz 空間に導入することにより，可測関数列の概一様収束性に関する Egoroff の定理が，上および下から連続な Riesz 空間値非加法的測度に対しても成立することを報告する.

1. 序論

非加法性をもつ測度としてのファジィ測度及びその積算としてのファジィ積分の概念は，工学システムにおける非加法量・非線形量を評価することを目的として，1974年に菅野 [15] により導入された．奇しくも年を同じくして，Dobrakov [2] は数学的観点から全く独立に "submeasure" の概念 (今の用語で言うと，order continuous かつ autocontinuous な非加法的測度) を導入し，可算加法的測度論の多くの結果が submeasure に対しても成立することを示した．ファジィ測度や submeasure は共に非加法性をもつ測度であり，彼らの先駆的な研究は，多くの工学者や数学者が非加法的測度論に興味をもつ引き金となった [1, 14, 16].

非加法的測度論における研究指針の一つは，測度の非加法性に起因して一般には不成立となる測度論の重要定理に着目し，その成立のために測度に課すべき必要条件 (可能ならば必要十分条件) を発見することである．可測関数列の概一様収束性に関する Egoroff の定理 [3] は測度論における最重要定理の一つであるが，非加法的測度に対しては一般には成立しない．最近，室伏ら [13] により，Egoroff の定理が成立するための必要十分条件 (Egoroff 条件) が発見され，任意のファジィ測度が Egoroff 条件を満たすことが示された (Li [8])．この要約の目的は，これらの結果が Riesz 空間値非加法的測度の場合にも成立することを報告することにある.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 28B15; Secondary 28E10, 46A40.
Key words and phrases. non-additive measure, Riesz space, the Egoroff theorem, the Egoroff condition, multiple regulator, the asymptotic Egoroff property, continuity from above and below.
*Research supported by Grant-in-Aid for General Scientific Research No. 18540166, Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology, Japan.

一般に，Riesz 空間値測度論を展開する際には，通常の測度論で有効な “ε-論法” が機能しないことが最大の障害となる．この障害は，測度が可算 (劣) 加法性を満たす場合には，Riesz 空間に弱 σ-分配性という “滑らかさ” の条件を課すことで,「測度の値域を適当なコンパクト Stone 空間上の連続関数空間に埋め込み，そこで Dini の定理を援用して理論展開する方法」や「通常の順序収束性の精密化である D-収束性と，その列の操作を可能とする Fremlin の補題を組合わせる手法」により，ある程度は克服可能である ([5, 6])．しかし，一般の非加法的測度の場合はこれらはもはや機能せず，全く新しい手法を開発する必要がある．

この要約では，Luxemburg によって導入された Egoroff 性にヒントを得て，それを一般化した漸近的 Egoroff 性という Riesz 空間の “滑らかさ” に関する概念を新たに導入することにより，可測関数列の概一様収束性に関する Egoroff の定理が，上および下から連続な Riesz 空間値非加法的測度，いわゆるファジィ測度に対しても成立することを [7] の結果を中心に報告する．

2. 記号と準備

この章では，Riesz 空間や Riesz 空間値非加法的測度に関する必要最小限の用語をまとめる．以下では，自然数全体を $\mathbb{N}$ で，実数全体を $\mathbb{R}$ で表す．

2.1. Riesz 空間. 上に有界な空でない任意の部分集合 (上に有界な空でない任意の可算部分集合) が上限をもつような Riesz 空間は，**Dedekind 完備** (**Dedekind σ-完備**) であるという．Riesz 空間 V の正の要素全体を $V^+ := \{u \in V : u \geq 0\}$ で表す．与えられた点列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ と $u \in V$ に対して，$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調減少で $\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n = u$ を満たすとき，$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は u に**単調減少収束**するといい，$u_n \downarrow u$ とかく．単調増加収束 $u_n \uparrow u$ も同様に定義する．点列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が u に**順序収束**するとは，0 に単調減少収束する点列 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|u - u_n| \leq p_n$ が成り立つことである．このとき $u_n \to u$ とかく．点列の順序収束のもつ性質は [17, Lemma 10.1, Theorem 10.2] で与えられている．この収束性は容易に有向族 (net) の場合に拡張でき，有向族に対しても適当な修正を行えば点列の順序収束がもつのと同様の性質が成立する．詳しくは [6, Proposition 1] を見よ．また，Riesz 空間に関するより詳細な情報については [12, 17] を見よ．

2.2. Riesz 空間値非加法的測度. 以下では $(X, \mathcal{F})$ は可測空間，すなわち，$\mathcal{F}$ は空でない集合 X の部分集合からなる σ-集合体とする．

定義 2.1. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to V$ は

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $A, B \in \mathcal{F}$ で $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ (単調増加性)

を満たすとき，**非加法的測度** (non-additive measure) という．

定義 2.2. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to V$ は非加法的測度とする．

(1) 集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ と $A \in \mathcal{F}$ が $A_n \downarrow A$ を満たせば $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$ となるとき，μ は**上から連続** (continuous from above) という．

(2) 集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ と $A \in \mathcal{F}$ が $A_n \uparrow A$ を満たせば $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$ となるとき，μ は**下から連続** (continuous from below) という．

3. EGOROFF の定理

可測関数列の概一様収束性に関する Egoroff の定理は測度論における最重要定理の一つであるが，非加法的測度に対しては一般には成立しない．最近の論文 [13, Proposition 1] で室伏らは，Egoroff の定理が成立するための必要十分条件 (Egoroff 条件) を発見した．まず彼らが発見した条件を Riesz 空間の枠組みで記述することから始める．以下では自然数全体 $\mathbb{N}$ からそれ自身への写像全体を Θ で表す．

定義 3.1. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to V$ は非加法的測度とする．

(1) 2 重集合列 $\{A_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \subset \mathcal{F}$ は

(E1) $m, n, n' \in \mathbb{N}$ で $n \le n'$ ならば $A_{m,n} \supset A_{m,n'}$

(E2) $\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{m,n}\right) = 0$

を満たすとき，**μ-regulator** in $\mathcal{F}$ という．

(2) 任意の μ-regulator $\{A_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ in $\mathcal{F}$ に対して

$$\inf_{\theta\in\Theta} \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m,\theta(m)}\right) = 0$$

が成り立つとき，μ は **Egoroff 条件**を満たすという．

注意 3.2. Li [9] は室伏らと独立に，Egoroff の定理が実数値非加法的測度に対して成立するための別形式の必要十分条件を与え，それを**条件 (E)** とよんでいる．

定義 3.3. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to V$ は非加法的測度で，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は X 上の $\mathcal{F}$-可測な実数値関数，f もそのような関数とする．

(1) 集合 $E \in \mathcal{F}$ with $\mu(E) = 0$ が存在して，任意の $x \in X - E$ に対して $f_n(x) \to f(x)$ が成り立つとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に **μ-概収束**するという．

(2) 単調減少な有向集合族 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset \mathcal{F}$ with $\mu(E_\alpha) \downarrow 0$ が存在して，各 $X - E_\alpha$ 上で f_n が f に一様収束するとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に **μ-概一様収束**するという．

(3) X 上の $\mathcal{F}$-可測な実数値関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が X 上の $\mathcal{F}$-可測な実数値関数 f に μ-概収束すれば常に μ-概一様収束するとき，**Egoroff の定理が μ に対して成立する**という．

次の定理は [13, Proposition 1] の Riesz 空間への拡張になっている.

定理 3.4. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to V$ は非加法的測度とする. このとき次の条件は同値:

(i) Egoroff の定理が μ に対して成立する.

(ii) μ は Egoroff 条件を満たす.

Li は論文 [8, Theorem 1] で, 上および下から連続な実数値非加法的測度 (いわゆるファジィ測度) に対して Egoroff の定理が成立することを示した. しかし, その証明の本質部分は ε-論法であり, 一般の Riesz 空間では実行不可能である. そこで以下では, ε-論法の代わりとなる新たな滑らかさの概念を Riesz 空間に導入し, Li の結果を Riesz 空間の枠組みに拡張することを考える.

定義 3.5. $u \in V^+$ とする. 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して, V の要素からなる多重列 $u^{(m)} := \{u_{n_1,\dots,n_m}\}_{(n_1,\dots,n_m)\in\mathbb{N}^m}$ を考える.

(1) 多重列の列 $\{u^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ は, 各 $m \in \mathbb{N}$ と各 $(n_1,\dots,n_m) \in \mathbb{N}^m$ に対して

(M1) $0 \le u_{n_1} \le u_{n_1,n_2} \le \cdots \le u_{n_1,\dots,n_m} \le u$

(M2) $n \to \infty$ のとき $u_n \downarrow 0$, $u_{n_1,n} \downarrow u_{n_1}, \dots, u_{n_1,\dots,n_m,n} \downarrow u_{n_1,\dots,n_m}$

を満たすとき, ***u*-多重 regulator** (u-multiple regulator) in V という.

(2) Riesz 空間 V は, 任意の $u \in V^+$ と u-多重 regulator $\{u^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ に対して

(i) 各 $\theta \in \Theta$ に対して, 上限 $u_\theta := \sup_{m\in\mathbb{N}} u_{\theta(1),\dots,\theta(m)}$ が存在

(ii) $\inf_{\theta\in\Theta} u_\theta = 0$

が成り立つとき, **漸近的 Egoroff 性** (asymptotic Egoroff property) をもつという.

注意 3.6. Riesz 空間 V が Dedekind σ-完備のときは, 上の定義の条件 (i) は自動的に満たされる.

漸近的 Egoroff 性は次に紹介する Egoroff 性の変形である. Egoroff 性は [12, Chapter 10] でその性質がすでに徹底的に調べられている.

定義 3.7. $u \in V^+$ とする.

(1) 2 重点列 $\{u_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \subset V$ は

(i) 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \le u_{m,n} \le u$

(ii) $m, n \in \mathbb{N}$ で $n \to \infty$ のとき $u_{m,n} \downarrow 0$

を満たすとき, ***u*-regulator** in V という.

(2) Riesz 空間 V は, 任意の $u \in V^+$ と任意の u-regulator $\{u_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ in V に対して, 0 に単調減少収束する点列 $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ が存在して, 各 $(k,m) \in \mathbb{N}^2$ に対して $n(k,m) \in \mathbb{N}$ を選んで $u_{m,n(k,m)} \le v_k$ とできるとき, **Egoroff 性** (Egoroff property) をもつという.

Riesz 空間 V は，その部分集合 W に上限が存在すれば，同じ上限をもつ W の可算部分集合を選べるとき，**順序可分** (order separable) であるという．Riesz 空間の具体例としての多くの関数空間や数列空間はこの性質をもつ [12, Example 23.3]．次の命題は "漸近的 Egoroff 性" という名前の由来を暗示している．

命題 3.8. 漸近的 Egoroff 性をもつ順序可分な Riesz 空間は Egoroff 性をもつ．

漸近的 Egoroff 性はそのイデアルに遺伝する．

命題 3.9. 漸近的 Egoroff 性をもつ Riesz 空間のイデアルは漸近的 Egoroff 性をもつ．

以上の準備の下で，Li の結果 [8, Theorem 1] を Riesz 空間の枠組みへ拡張することができる．

定理 3.10. Riesz 空間 V は漸近的 Egoroff 性をもつとする．このとき Egoroff の定理は上および下から連続な任意の非加法的測度 $\mu : \mathcal{F} \to V$ に対して成立する．

4. 漸近的 Egoroff 性をもつ Riesz 空間の例

この章では漸近的 Egoroff 性をもつ Riesz 空間の具体例を幾つか挙げる．

命題 4.1. S は空でない集合とする．S 上の実数値関数全体からなる Dedekind 完備な Riesz 空間 $\mathbb{R}^S$ は漸近的 Egoroff 性をもつ．

注意 4.2. Holbrook [4, Example 4.2] によれば，Riesz 空間 $\mathbb{R}^S$ が Egoroff 性をもたないような非可算集合 S が存在する．しかし，命題 4.1 より，そのような S に対しても $\mathbb{R}^S$ は漸近的 Egoroff 性をもつ．また，このとき $\mathbb{R}^S$ は順序可分ではない [12, Example 23.3 (iii)]．よって，命題 3.8 において Riesz 空間 V が順序可分という仮定を取り除くことはできない．実際には，連続体仮説を仮定すれば，与えられた空でない集合 S に対して，S が高々可算の場合に限り $\mathbb{R}^S$ が Egoroff 性をもつことが知られている [12, Theorem 75.3]．

命題 3.9 と 命題 4.1 より次の系を得る．

系 4.3. 以下が成り立つ．

(1) S は空でない集合とする．S 上の有界な実数値関数全体からなる Dedekind 完備な Riesz 空間 $B(S)$ は漸近的 Egoroff 性をもつ．
(2) 実数列全体からなる Dedekind 完備な Riesz 空間 s 及びそのイデアル ℓ_p $(0 < p \leq \infty)$ は漸近的 Egoroff 性をもつ．

命題 4.4. 測度空間 $(S, \mathcal{S}, \nu)$ は σ-有限とする．S 上の ν-可測実数値関数の同値類全体からなる Dedekind 完備 Riesz 空間 $\mathcal{L}_0(\nu)$ は漸近的 Egoroff 性をもつ．

測度空間 $(S,\mathcal{S},\nu)$ は σ-有限で，$0<p<\infty$ とする．S 上の ν-可測な実数値関数 f で $\int_S |f|^p d\nu < \infty$ を満たすものの同値類全体からなる Dedekind 完備 Riesz 空間を $\mathcal{L}_p(\nu)$ で表す．また，$\mathcal{L}_\infty(\nu)$ で S 上の ν-本質的に有界な，ν-可測実数値関数の同値類全体からなる Dedekind 完備 Riesz 空間を表す．これらの空間はすべて $\mathcal{L}_0(\nu)$ のイデアルなので，命題 3.9 と命題 4.4 より，次の結果を得る．

系 4.5. 測度空間 $(S,\mathcal{S},\nu)$ は σ-有限とする．Riesz 空間 $\mathcal{L}_p(\nu)$ $(0<p\leq\infty)$ は漸近的 Egoroff 性をもつ．

Banach 束は，0 に単調減少収束する任意の有向族 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ に対して，$\inf_{\alpha\in\Gamma}\|u_\alpha\|=0$ が成り立つとき，**順序連続なノルム** (order continuous norm) をもつという．順序連続なノルムをもつ Banach 束は Dedekind 完備である [17, Theorem 17.8]．次の命題は命題 4.4 と同様にして示せる．

命題 4.6. 順序連続なノルムをもつ Banach 束は漸近的 Egoroff 性をもつ．

命題 4.7. L，M は Riesz 空間で，M は Dedekind 完備かつ漸近的 Egoroff 性をもつとする．このとき，L から M への順序有界な線形作用素全体からなる Dedekind 完備な Riesz 空間 $\mathcal{L}_b(L,M)$ は漸近的 Egoroff 性をもつ．

最後に，漸近的 Egoroff 性をもたない Riesz 空間の例を 2 つ挙げてこの要約を終えることとする．

命題 4.8. 閉区間 $[0,1]$ 上の連続な実数値関数全体からなる Riesz 空間 $C[0,1]$ は漸近的 Egoroff 性をもたない．

命題 4.9. 辞書式順序をもつ順序平面 $\mathbb{R}^2$ は漸近的 Egoroff 性をもたない．

注意 4.10. 辞書式順序をもつ順序平面 $\mathbb{R}^2$ は Egoroff 性をもつ [12, Example 67.6 (ii)]．この事実と注意 4.2 より漸近的 Egoroff 性と Egoroff 性は一般には互いに独立な概念であることがわかる．

参考文献

[1] D. Denneberg, *Non-Additive Measure and Integral*, 2nd Edition, Kluwer, Dordrecht, 1997.

[2] I. Dobrakov, *On submeasures* I, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **112**, Warszawa, 1974.

[3] D.-Th. Egoroff, *Sur les suites des fonctions mesurables*, C. R. Acad. Sci. Paris **152** (1911) 244–246.

[4] J.A.R. Holbrook, *Seminorms and the Egoroff property in Riesz spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **132** (1968) 67–77.

[5] J. Kawabe, *The portmanteau theorem for Dedekind complete Riesz space-valued measures*, in Nonlinear analysis and convex analysis, (W. Takahashi and T. Tanaka, Editors), Yokohoma Publishers, 2004, 149–158. Yokohama Publishers, Yokohama.

[6] J. Kawabe, *Uniformity for weak order convergence of Riesz space-valued measures*, Bull. Austral. Math. Soc. **71** (2005) 265–274.

[7] J. Kawabe, *The Egoroff theorem for non-additive measures in Riesz spaces*, to appear in Fuzzy Sets and Systems.

[8] J. Li, *On Egoroff's theorems on fuzzy measure spaces*, Fuzzy Sets and Systems **135** (2003) 367–375.

[9] J. Li, *A further investigation for Egoroff's theorem with respect to monotone set functions*, Kybernetika **39** (2003) 753–760.

[10] J. Li and M. Yasuda, *Egoroff's theorem on monotone non-additive measure spaces*, Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems **12** (2004) 61–68.

[11] J. Li and M. Yasuda, *On Egoroff's theorems on finite monotone non-additive measure space*, Fuzzy Sets and Systems **153** (2005) 71–78.

[12] W.A.J. Luxemburg and A.C. Zaanen, *Riesz Spaces,* I, North-Holland, Amsterdam, 1971.

[13] T. Murofushi, K. Uchino, and S. Asahina, *Conditions for Egoroff's theorem in non-additive measure theory*, Fuzzy Sets and Systems **146** (2004) 135–146.

[14] E. Pap, *Null-Additive Set Functions*, Kluwer, Dordrecht, 1995.

[15] M. Sugeno, *Theory of fuzzy integrals and its applications*, Doctoral Thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974.

[16] Z. Wang and G.J. Klir, *Fuzzy Measure Theory*, Plenum, New York, 1992.

[17] A.C. Zaanen, *Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces*, Springer, Berlin, 1997.